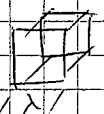
LEZIONE 1 — 03.03.2014

Ci occupiamo del trasporto di pnt. di mto (FLUIDI), massa ed energia (calore).

Tutto si muove verso l'EQUILIBRIO: termico, meccanico, chimico (stesse T, stesse p, stesso μ).
I sistemi tendono a ripristinare le condizioni di equilibrio in risposta alle sollecitazioni.

EQ LOCALE: ovvero si suppone che ci sia ep. anche solo localmente. Considero un volumetto cubico (continuo) abbastanza grande così che tutte le medie che faccio abbia senso. Di T è, ad esempio, la en. cinetica media delle particelle.

Se in fisica ho una grandezza A voglio che δA ovvero le fluttuazioni di A nel tempo, abbia senso ovvero sia della stessa scala di grandezza della variabile di A nella lunghezza.



$$\delta A \simeq \overline{\nabla A} \cdot \lambda$$

λ deve contenere un numero sufficiente di molecole. Per capirlo supponiamo che

$$\rightarrow A = \sum_{i=1}^{N} a_i \quad \Rightarrow \quad \langle A \rangle = \sum_{i=1}^{N} \bar{a} = N\bar{a} = \bar{A}$$

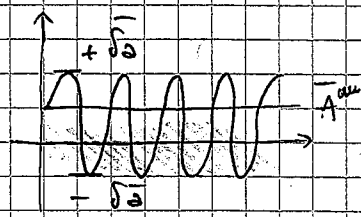
Se considero $(A - \bar{A}) = \sum_{i=1}^{N} (a_i - \bar{a}) = \sum_{i=1}^{N} \delta a_i$ → la media delle fluttuazioni è sempre zero, le cui media è nulla

Se prendo $(A - \bar{A})^2 = \left(\delta a_1 + \delta a_2\right)^2 = \delta a_1^2 + \delta a_2^2 + 2\,\delta a_1 \delta a_2$ (scost. quadratico medio, $N=2$)

Ora faccio le medie di entrambi i membri dell'equazione. Se capisco che $\overline{\delta a} = 0$, vedo che $\overline{\delta a^2} = (\delta a)^2$, ovvero solo le parte positiva.

Mentre è nulla la media del prodotto di due funzioni random in correlate. Da cui ottengo $2(\delta a)^2$.

In generale si ottiene $\left[(\delta A)^2 = N(\delta a)^2\right]$ prop. non uguale



Se definisco $\hat{A} = \frac{A}{N}$ mi dice che $(\delta \hat{A})^2 \propto \frac{1}{N}$ → sostituzione

Perciò: $\left[\frac{(\delta A)}{\bar{A}} \equiv (\delta \hat{A})^2 \propto \frac{1}{\sqrt{N}}\right]$ → Controllare su libro

Quindi prendo dim. λ : $(1/\sqrt{N}) < \varepsilon$ (imposto) ← ebb. grande

Contemporaneamente $\lambda \overline{\nabla A} \leq \delta A = \frac{\bar{A}}{\sqrt{N}}$ ← ebb. piccolo

Questo λ è il nostro "punto materiale".

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

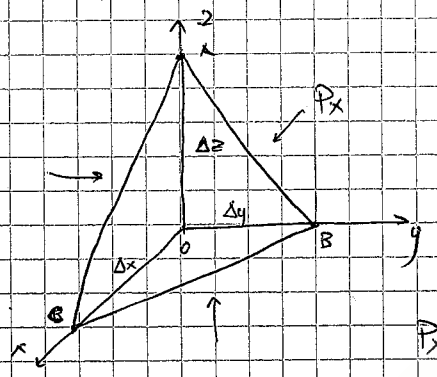
Supponiamo di prendere $N = 10^6 \Rightarrow \varepsilon = 1\,‰$

n = number density $= \frac{\#\,mol}{vol} = \rho \cdot \frac{1}{PM} \cdot N_A = 10^{20}\ \frac{part.}{cm^3}$ ordine di grandezza per reale.

Perciò $n\lambda^3 = 10^6 \Rightarrow \lambda = 0{,}1\ \mu m$ ← dimensionalmente

Perciò $\overline{\nabla T}_{max} \simeq \frac{\delta T}{\lambda} \simeq \frac{T \to 300\,K}{\lambda\sqrt{N}} \rightsquigarrow \overline{\nabla T}_{max} \simeq 10^9 \div 10^5\ \frac{K}{cm}$

PRESSIONE, perché è uno scalare?



Quattro forze sulle facce frontali. Siamo in condizioni statiche ergo le $\vec{P}$ può essere solo perpendicolare, altrimenti comporti di taglio e il liquido si muoverebbe per definizione

$P_x \cdot S(AOB) = P_n\, S(ABC) \cos\vartheta$ ← tra n e x

↓ le $\vec{P}$ che agisce sulle facce di fronte

Si vede (in 2D è ovvio) che $S(ABC)\cos\vartheta = S(AOB)$

Trovo lo stesso per P_y e P_z. Questo per le forze superficiali

Per le forze di volume avrei $\left[\rho f \frac{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{6}\right] \vec{f}$

Tenendo conto di tutto invece $P_z \frac{\Delta x \Delta y}{2} = P_n \frac{\Delta x \Delta y}{2} + \rho g \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6}$ ($\frac{b \cdot h}{2}$)

Si vede che, nel microscopico, le forze superficiali sono prevalenti.

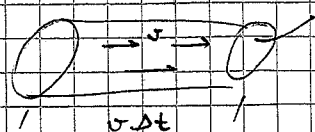
Infine $P_x = P_y = P_z = P$ scalare e si chiude la questione.

FLUSSO J_A: $\left[\frac{A}{sup.\,t}\right]$ J_D: $\begin{cases} \text{CONVETTIVI} \\ \text{DIFFUSIVI} \end{cases}$ avrei due modalità trasporto

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Convezione: trasporto per movimento del fluido. ①

Diffusione: trasporto senza movim. netto del fluido. ②

① 

$\left[J_M = \frac{M}{S \cdot \Delta t} = \rho \vec{v}\right]$ ← pnt. di misto

Ergo J_M è un trend problem entale

$M = \rho v \Delta t \cdot S$

Per def. $J_{M,diff} = 0$

Invece il flusso di quantità di moto convettivo: $J_{Qc} = \frac{Q}{S\Delta t} = \rho v^2$ (ogniuna delle velocità è un vettore)

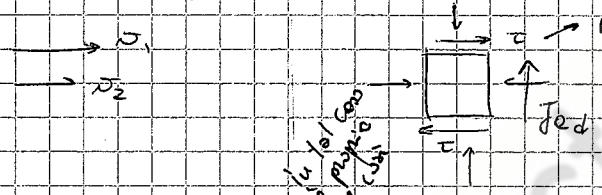
$Q = (\rho v) S v \Delta t$

Flusso entalpia (calore) convettivo: $J_{Uc} = \frac{U}{S \cdot \Delta t} = \rho c \Delta T v$

$U = \rho c \Delta T \cdot S v \Delta t = Mc\Delta T$

La convezione non comporta aumento di entropia ergo si vede via il vantaggio che introduce nel tempo di diffusione no. Vedo il suo flusso.

Ho linee di fluido a diverse velocità:



Lo sforzo di taglio è quindi il flusso di quantità di moto diffusivo. Dimensionalmente:

$[\tau] = \frac{N}{m^2} = \frac{Kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2} = \frac{Kg}{m \cdot s^2}$

$[J_Q] = \frac{Q}{S \cdot \Delta t} = \frac{Kg \cdot m}{s \cdot m^2 \cdot s} = \frac{Kg}{m \cdot s^2}$

$\Rightarrow \left[\tau = J_{Qd} = -\mu \frac{dv}{dy} = -\nu \frac{d(\rho v)}{dy} \right]$ (legge di Newton)

(μ: visc. dinamica; ν: visc. cinematica)

μ si misura in Poise ovvero g/(cm·s). Si usa invece il cP $= 10^{-2}$ Poise ($\mu_{H_2O} \approx 1$ cP)

ν si misura in $\frac{m^2}{s}$, diffusività quantità di moto

Se vedo il $J_{U,d} = -K \frac{dT}{dy} = -K \nabla T$ (legge di Fourier)

(K: cond. termica; $-$: da caldo a freddo; ∇T: opposto al gradiente)

LEZIONE 2 04.03.2014

(N.B.) Se una grandezza è scalare il suo flusso è un vettore. Se è un vettore il flusso è un tensore.

$[K]$ conducibilità termica $= \left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$ perché $[dT/dy] = K/m$

$\left[J_U\right] = \frac{E}{S\Delta t} = \frac{J}{S \cdot \Delta t} = \left[\frac{W}{m^2}\right]$

$J_{Ud} = -\nu \frac{d(\rho c)}{dy}$ (ρ: $K/(\rho c)$; c: $c\Delta T$)

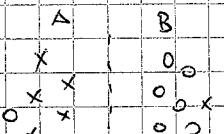
J_{Ud} dividendo e moltiplicando per ρc $= -\frac{d(\rho c)}{dy}$ $\Rightarrow \left[\alpha = \frac{K}{\rho c}\right]$ diffusività termica

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$[J_u] = J/m^2 \cdot s$; $\left[\frac{du}{dy}\right] = \frac{J}{m^3} \cdot \frac{1}{m}$

da cui $\left[[\alpha] = \frac{m^2}{s}\right]$ ovvero le stesse dimensioni di una diffusività

Si può parlare di diffusione mossica se c'è il flusso di una specie dentro l'altra. Ste di fatto che non esiste un movimento netto. Se dico:



$J_A = \frac{M_A}{S \cdot \Delta t}$ e similmente di B.

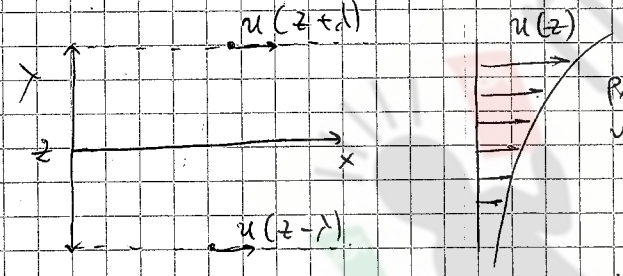
Mixus perciò un flusso netto di A e uno di B. Solo il flusso netto TOTALE è nullo.

Ergo $\left[J_{A,d} = -D \frac{d C_A}{dy}\right]$ con $C_A = \frac{M_A}{m^3}$ concentrazione

Legge di Fick

con $J_{A,d} = \frac{M_A}{m^2 \cdot s}$ $\Rightarrow D \left[[D] = \frac{m^2}{s}\right]$ diffusività molecolare

CENNI sulle COSTANTI di PROPORZIONALITÀ delle TRE LEGGI (μ, K, D ...)



Se un sistema ha N gradi di libertà l'energia tende a disperdersi così che ogni grado abbia lo stesso quantitativo di energia.

Lungo y ho $v < < u$ ovvero le fluttuazioni lungo z Queste energie è $U = \frac{1}{2} KT$

Si vede in effetti che $P = \frac{F}{A} = \frac{\Delta(mv)}{A \cdot \Delta t}$ (2mv) = pesseffi = $\frac{N_A \cdot K}{V}$ (R) $\bar{T}$ lo dimostriamo dopo

Se prendo una molecola di gas so che ha 3 gradi di libertà perciò la sua energia cinetica è: $\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} KT$ $\bar{v}$ ha solo componente v_z

$\Rightarrow \bar{v}_z^2 \simeq \frac{KT}{m}$ $\Rightarrow v \simeq \sqrt{\frac{KT}{m}}$ velocità di fluttuazione

Diciamo che $n = \frac{\#\ part.}{V} = cost.$ in un sist. omogeneo

Quindi ho n/3 per esse. Prendo quelle su z e so che n/6 vanno in su e in giù.

Ergo il flusso che arriva lungo z è $\left(\frac{n}{6} v\right) = \frac{\#\ part}{S \cdot \Delta t}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Tuttavia le particelle che arrivano da su portano una qut. di moto pari a $mu(z+\lambda)$ e viceversa $mu(z-\lambda)$.

Quindi c'è movimento nella direz. x mentre lungo y c'è flusso di qut. di moto.

Perciò ricavo $J_x = \left(\frac{1}{6} n v\right)\left[\underbrace{mu(z-\lambda)}_{u(z)-\lambda\frac{du}{dz}} - \underbrace{mu(z+\lambda)}_{u(z)+\lambda\frac{du}{dz}}\right] =$ → espansione in serie?

$$= \left(\frac{1}{6} n v\right)\left(-2\lambda m \frac{du}{dz}\right) = -\mu \frac{du}{dz} \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}(nm)\lambda v \to \rho$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3}\lambda v \longrightarrow \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Analogamente per l'energia avrò $mc\Delta T(z-\lambda)$ etc. e il resto è uguale.

Sulla base di queste abbiamo vari numeri adimensionali.

$\frac{\nu}{\alpha}$ = Prandtl (Pr) ; $\frac{\nu}{D}$ = Schmidt (Sc)

α = le molecole diffondono portandosi dietro calore e qut. moto

Per il gas ideale $Pr \simeq Sc \simeq 1$. E grosso modo anche per il gas reale.

Per i liquidi questo non è invece valido. Per esempio l'acqua dà:

$\nu_{H_2O} = 10^{-6}\frac{m^2}{s} \simeq 10^{-2}\frac{cm^2}{s}$ mentre $\nu_{ARIA} \simeq 16\cdot 10^{-2}\frac{cm^2}{s}$

Se ora prendiamo le D vedo che $D_{ARIA} \simeq \nu_{ARIA} \simeq \alpha_{ARIA}$

Vedo invece che $\alpha_{H_2O} = 0{,}14\cdot 10^{-2}\frac{cm^2}{s}$ mentre $\left[D \simeq 10^{-6}\frac{cm^2}{s}\right]$

ovvero le D nei liquidi è estremamente più piccola che nei gas. Se ne c'è che $Sc \gtrsim 10^{+4}$ per i liquidi. Al contrario è molto più facile trasportare qut. di moto e calore visto le vicinanze delle molecole.

MOTO CAOTICO (TEOREMA FLUTTUAZIONE DISSIPATIVA)



Random walk $\underline{R}$ è il vettore che unisce il punto iniziale e quello finale.

Poiché ci si può muovere con la stessa probabilità in ogni direzione di l. Perciò in media si sta fermi.

$|\underline{r}_i| = l$

$\langle \underline{r}_i \rangle = \underline{0}$ perciò $\underline{R} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i$ e $\langle \underline{R} \rangle = \sum \langle r_i \rangle = 0$

Invece se considero $\langle R^2 \rangle = \langle \underline{R}\cdot\underline{R} \rangle = \sum_i \sum_j \langle \underline{r}_i \cdot \underline{r}_j \rangle$

Se $R = 2$ $\Rightarrow \underline{R} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2$ e $R^2 = \underbrace{r_1^2}_{l^2} + \underbrace{r_2^2}_{l^2} + 2r_1 r_2$ $\Longrightarrow$